

# Тема 7. Интегральное исчисление.

## §1 Неопределенный интеграл и его свойства.

### 1.1 Первообразная и неопределенный интеграл.

В дифференциальном исчислении решалась задача, где по данной функции  $y = f(x)$  находилась ее производная или дифференциал.

В интегральном же исчислении решается обратная задача: по дифференциалу данной функции находится сама функция. Этот процесс называется **интегрированием**.

**Определение 1. Первообразной от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a;b]$  называется функция  $F(x)$ , производная которой в каждой точке отрезка равна  $f(x)$ , т.е.**

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

**Пример.**

$$f(x) = 5x^4 \Rightarrow F(x) = x^5 ;$$
$$F(x) = x^5 + 10 ; F(x) = x^5 - 20 \text{ и т.д.}$$

Таким образом, первообразных для данной функции  $f(x)$  может быть бесчисленное множество.

**Теорема.** Две различные первообразные одной и той же функции  $f(x)$ , определенные на некотором промежутке, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

**Доказательство:** Пусть  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  две первообразные одной и той же функции  $f(x)$ . Докажем, что они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

По определению первообразной:

$$F_1'(x) = f(x) \text{ и } F_2'(x) = f(x)$$

Найдем производную разности первообразных:

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$(F_1(x) - F_2(x))' = 0 \text{ значит}$$

$$F_1(x) - F_2(x) = c \Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + C,$$

ч.т.д.

**Вывод:** прибавляя к какой-либо первообразной  $F(x)$  все возможные постоянные значения  $C$ , можно получить все первообразные для

данной функции  $f(x)$ , т.е.  $F(x) + C$  - это есть совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$ .

**Определение 2.** **Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции  $f(x)$  называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается**

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ где}$$

$f(x)$  - подынтегральная функция;

$f(x) dx$  - подынтегральное выражение;

$F(x)$  - первообразная для  $f(x)$ ;

$C$  - постоянная интегрирования;

$x$  - переменная интегрирования;

$\int$  - знак интеграла.

**Определение 3.** **Действие нахождения первообразной для функции  $f(x)$  называется интегрированием данной функции.**

**Пример.**  $\int 5x^4 dx = x^5 + C$  ;  $\int 10x^9 dx = x^{10} + C$  ;

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$
$$\int e^x dx = e^x + C$$

## 1.2 Основные свойства неопределенного интеграла.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \qquad F'(x) = f(x)$$

**1. Производная от неопределенного интеграла  
равна подынтегральной функции:**

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$$

**Доказательство:**

$$\left( \int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$$

**Замечание.** На этом свойстве основывается  
проверка правильности нахождения  
неопределенного интеграла.

**2. Дифференциал от неопределенного  
интеграла равен подынтегральному  
выражению:**

$$d\left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$dy = y' dx$$

**3. Неопределенный интеграл от  
дифференциала некоторой функции равен  
самой этой функции с точностью до  
постоянного слагаемого:**

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

**4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:**

$$\boxed{\int A \cdot f(x) dx = A \int f(x) dx}, \quad A \neq 0$$

**5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции:**

$$\boxed{\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx}$$

**6. Свойство *инвариантности*:** всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановки вместо  $x$  любой дифференцируемой функции от  $x$ .

Если  $\int f(x) dx = F(x) + C$  и  $u = \varphi(x)$ , то  $\boxed{\int f(u) du = F(u) + C}$ . На этом свойстве основан метод непосредственного интегрирования.

**Пример.** Так как  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ , то

$$\int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\int (e^x)^2 d(e^x) = \frac{(e^x)^3}{3} + C$$

$$\int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + C \quad \text{и т.д.}$$

**Замечание.** Не путать с интегралами:

$$\int \sin^2 x dx \quad ; \quad \int (e^x)^2 dx \quad ; \quad \int (\ln x)^2 \cdot dx$$

### 1.3 Таблица основных интегралов.

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$3. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$4. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$5. \int e^u du = e^u + C$$

$$6. \int \cos u du = \sin u + C$$

$$7. \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$8. \int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$$

$$9. \int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$$

$$10. \int \sec^2 u du = \operatorname{tgu} + C$$

$$11. \int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{ctgu} + C$$

$$12. \int \sec u du = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$13. \int \operatorname{cosec} u du = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C$$

$$14. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$$

$$15. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$16. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$$

$$17. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + C$$

$$18. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

**Замечания:** 1) Все формулы данной таблицы можно проверить путем дифференцирования, так как интегрирование есть действие обратное дифференцированию.

$$\int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C$$

$$(\ln |\sin u| + C)' = \frac{(\sin u)'}{\sin u} = \frac{\cos u}{\sin u} = \operatorname{ctg} u$$

2) Данные интегралы принято называть табличными и основная задача интегрирования состоит в том, чтобы свести данный нам интеграл к табличному или нескольким табличным (если это возможно).

**Пример.** Найти интегралы по таблице:

$$1) \int \frac{dx}{x^2 - 100} = \frac{1}{20} \ln \left| \frac{x-10}{x+10} \right| + C \quad - (15)$$

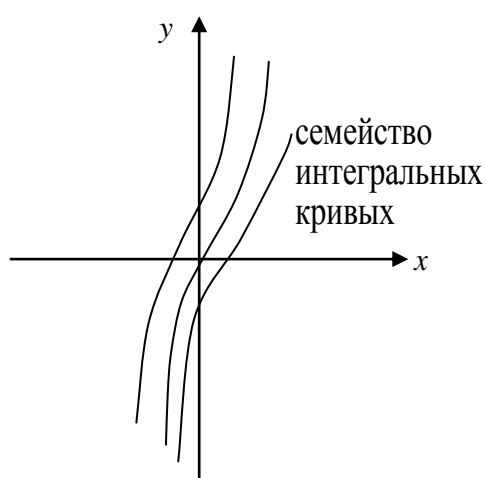
$$2) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 81}} = \frac{1}{9} \operatorname{arcsec} \frac{x}{9} + C \quad - (17)$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C \quad - (16)$$

## 1.4 Геометрический смысл неопределенного интеграла.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых вида  $y = F(x) + C$ , где  $F(x)$  - одна из первообразных функции  $f(x)$ . Интегральные кривые получаются друг из друга, путем параллельного переноса вдоль оси ОУ.

**Пример.**



$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$



$$f(x) = 3x^2 \quad ; \quad F(x) = x^3$$

$$\boxed{y = x^3 + C}, \text{ если}$$

$$c = 0 \quad y = x^3$$

$$c = 1 \quad y = x^3 + 1$$

$$c = -1 \quad y = x^3 - 1 \quad \text{и т.д.}$$

**Правило:** чтобы из семейства интегральных кривых  $y = F(x) + C$  выделить одну определенную кривую, нужно задать некоторые дополнительные условия для того, чтобы данная кривая, например, проходила через некоторую точку  $M(x_0; y_0)$ . Эти условия называются **начальными**, т.е. при  $x = x_0$  ;  $y = y_0$ .

С помощью этих условий можно найти постоянную величину  $C$ :

$$y_0 = F(x_0) + C \Rightarrow C = y_0 - F(x_0)$$

**Пример.** Выделить из предыдущего семейства кривую, проходящую через точку  $A(-1; 3)$ .

$y = x^3 + C$ . Подставим в это уравнение координаты точки  $A$ .

$$3 = (-1)^3 + C$$

$$C = 3 + 1$$

$$C = 4$$

$\Rightarrow$

$$\underline{y = x^3 + 4}$$

## 1.5 Методы непосредственного интегрирования.

### **1. Интегрирование по таблице.**

Заключается в прямом использовании табличных интегралов.

Пример.

$$1) \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 4} \right| + C$$

### **2. Интегрирование разложением подынтегральной функции на сумму функций.**

Этот метод основан на пятом свойстве интегралов: интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

Пример.

$$1) \int (3x^3 + 5x^2 - x + 2) dx = \int 3x^3 dx + \int 5x^2 dx - \int x dx + \int 2 dx =$$

$$= 3 \frac{x^4}{4} + 5 \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2} dx = \int \left( \frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$2) = \int dx + \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx = x + \ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

### 3. Непосредственное интегрирование.

#### 3.1. Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала.

Основан на свойстве инвариантности формулы неопределенного интеграла.

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{если } u = \varphi(x), \quad \text{то}$$

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

Пример.

1)

$$\int \cos x \cdot \sin x \cdot dx = \int \sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C, \quad \text{т.к. } \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$2) \int e^{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x dx = \int e^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) = e^{\operatorname{tg} x} + C$$

$$(dy = y' dx)$$

$$3) \int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \int \frac{d(\ln x)}{1 + \ln^2 x} = \operatorname{arctg}(\ln x) + C$$

#### 3.2. Добавление постоянного слагаемого под знак дифференциала.

При любой постоянной **a** будет выполняться равенство:

$d(x + a) = dx$ . Значит, и наоборот

$dx = d(x + a)$  и поэтому

$$\boxed{\int f(x) dx = \int f(x) d(x + a)},$$

т.е. под знак дифференциала можно ввести любое постоянное слагаемое.

**Пример.**

$$1) \int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = \ln|x+5| + C$$

**3.3. Введение под дифференциал постоянного множителя.**

$$\boxed{\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int f(x) d(ax)},$$

т.е. под знак дифференциала можно ввести любой постоянный множитель, разделив на него интеграл.

**Пример.**

$$1) \int \sin 7x dx = \frac{1}{7} \int \sin 7x d(7x) = -\frac{1}{7} \cos 7x + C$$

**3.4. Интеграл от дроби, числитель которой является производной знаменателя, равен логарифму знаменателя.**

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C}$$

**Пример.**

$$1) \int \frac{2x+3}{x^2+3x+7} dx = \ln|x^2+3x+7| + C$$

## 1.6 Метод подстановки.

Пусть  $\int f(x) dx$  не является табличным. Следует упростить подынтегральное выражение, введя новую переменную так, чтобы интеграл стал табличным.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ dx &= \varphi'(t) dt \end{aligned}}, \text{ т.е.}$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t)) \cdot d(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) + C$$

После нахождения интеграла необходимо вернуться к первоначальной переменной  $x$ .

**Пример.**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} &= \int \frac{2tdt}{t+1} = 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \int \left( \frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t+1} = \\ &\left. \begin{aligned} \sqrt{x+1} &= t \\ x+1 &= t^2 \\ dx &= 2tdt \end{aligned} \right| = 2t - 2 \int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2 \ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 2 \ln|\sqrt{x+1}+1| + C \end{aligned}$$

## 1.7 Интегрирование по частям.

Метод интегрирования по частям вызван тем, что нет формулы, позволяющей находить интеграл от произведения функции.

$$\begin{aligned} (u \cdot v)' &= u'v + uv' \\ d(u \cdot v) &= du \cdot v + u \cdot dv \end{aligned}$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства:

$$\int d(u \cdot v) = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

$$uv = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

$$\boxed{\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du} \text{ - формула}$$

интегрирования по частям

**Сущность метода:** подынтегральное выражение

$f(x)dx$  представляют в виде произведения 2-х множителей **u** и **dv**, затем пользуются правой частью формулы.

Как правильно выбрать **u** и **dv**:

|           | Вид интеграла                      | <b>u</b>    | <b>dv</b>          |
|-----------|------------------------------------|-------------|--------------------|
| <b>I</b>  | $\int p(x) \cdot \ln x dx$         | $\ln x$     | $p(x)dx$           |
|           | $\int p(x) \cdot \arcsin x dx$     | $\arcsin x$ | $p(x)dx$           |
|           | $\int p(x) \cdot \arctg x dx$      | $\arctg x$  | $p(x)dx$           |
| <b>II</b> | $\int p(x) \cdot \sin ax \cdot dx$ | $p(x)$      | $\sin ax \cdot dx$ |
|           | $\int p(x) \cdot \cos bx \cdot dx$ | $p(x)$      | $\cos bx \cdot dx$ |
|           | $\int p(x) \cdot e^{\alpha x} dx$  | $p(x)$      | $e^{\alpha x} dx$  |

|     |   |                |                      |                   |
|-----|---|----------------|----------------------|-------------------|
| III | $\int e^{\alpha x} \cdot \sin ax \cdot dx \rightleftharpoons$ | $e^{\alpha x}$ | $\rightleftharpoons$ | $\sin ax dx$      |
|     |   | $\sin ax$      | $\rightleftharpoons$ | $e^{\alpha x} dx$ |
|     | $\int e^{\alpha x} \cdot \cos bx \cdot dx \rightleftharpoons$ | $e^{\alpha x}$ | $\rightleftharpoons$ | $\cos bx dx$      |
|     |   | $\cos bx$      | $\rightleftharpoons$ | $e^{\alpha x} dx$ |
|     | $\int \sin(\ln x) dx$   | $\sin(\ln x)$  |                      | $dx$              |

$P(x)$  - многочлен или одночлен.

### Замечание:

Интегралы III группы берутся по частям дважды, в результате чего получается исходный интеграл. Интегрирование прекращается, и из полученного выражения находят искомый интеграл, выражая его через все остальные члены.

### Пример.

1)

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} \ln x = u & \frac{dx}{x} = du \\ dx = dv & x = v \end{array} \right| =$$
$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx =$$

$$= \underline{x \cdot \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C}$$

2)

$$\int x^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} x^2 = u & \cos x dx = dv \\ 2x dx = du & \sin x = v \end{array} \right| = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx =$$

$$= x^2 \cdot \sin x - 2 \int x \cdot \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x = u & \sin x dx = dv \\ dx = du & v = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \cdot \sin x - 2 \left( -x \cdot \cos x - \int (-\cos x) dx \right) =$$

$$= x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + C$$



3)

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} e^x = u & \sin x dx = dv \\ e^x dx = du & -\cos x = v \end{array} \right| = -e^x \cos x - \int (-\cos x) \cdot e^x dx =$$

$$= -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} e^x = u & \cos x dx = dv \\ e^x dx = du & \sin x = v \end{array} \right| =$$

$$-e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x dx;$$

$$2 \int e^x \cdot \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$$

## §2 Интегрирование рациональных и тригонометрических функций.

### 2.1 Рациональные функции.

#### Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби.

Определение 1. **Рациональной функцией** называется функция, равная отношению двух многочленов. Рациональные функции иначе

называются **рациональными дробями.**

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Пример.  $R_1(x) = \frac{x^2 + 3x + 7}{x^4 + 9x^3 + 8}$   $R_2(x) = \frac{x^2 + 9}{x - 1}$   $R_3(x) = \frac{3x^2 + 5x + 8}{x^2 + 2x - 3}$

**Определение 2. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя.**

$R_1(x)$  - правильная рациональная дробь.

**Определение 3. Рациональная дробь называется *неправильной*, если степень числителя больше или равна степени знаменателя.**

$R_2(x)$ ,  $R_3(x)$  - неправильные рациональные дроби.

Если дробь правильная, то можно начинать интегрирование.

Если дробь неправильная, то ее представляют в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, а правильную рациональную дробь, в свою очередь,

представляют в виде суммы простейших (элементарных) дробей.

**Теорема. Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, используя алгоритм Евклида деления многочлена на многочлен.**

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}}$$

**Пример.**

$$\begin{array}{r} \frac{x^3 + 3x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 4x + 5 + \frac{4}{x - 1} \\ \begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + x - 1 \\ x^3 - x^2 \\ \hline -4x^2 + x - 1 \\ -4x^2 - 4x \\ \hline 5x - 1 \\ -5x - 5 \\ \hline 4 \end{array} \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x - 1 \\ \hline x^2 + 4x + 5 \end{array} \right.$$

4 – неделимый остаток

Всякую правильную дробь можно единственным образом разложить на простейшие (элементарные) дроби. Существует 3 типа элементарных дробей:

1.  $\frac{A}{x - a}$  - I тип

$$2. \frac{A}{(x-a)^n} - \text{II тип}$$

$$3. \frac{Ax+B}{x^2+px+q} - \text{III тип}$$

### Разложение правильной рациональной дроби на простейшие.

- 1) Если знаменатель содержит различные линейные множители, т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

$A - ?$   
 $B - ?$   
 $C - ?$

- 2) Если знаменатель содержит повторяющиеся линейные множители, т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3} =$$

$$= \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{C_1}{x-c} + \frac{C_2}{(x-c)^2} + \frac{C_3}{(x-c)^3} ;$$

$A - ? \quad B_1 - ? \quad B_2 - ?$   
 $C_1 - ? \quad C_2 - ? \quad C_3 - ?$

- 3) Если знаменатель правильной рациональной дроби содержит неразложимые квадратные трехчлены (с отрицательным дискриминантом), т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{Cx + D}{x^2 + p_2x + q_2}$$

## 2.2 Интегрирование простейших дробей.

Интеграл от простейшей дроби:

1) I типа:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{1}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

2) II типа

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$$

3) III типа ( $D < 0$ )

В знаменателе выделим полный квадрат:

$$x^2 + px + q = \left( x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} \right) - \frac{p^2}{4} + q =$$

$$= \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left( q - \frac{p^2}{4} \right) = \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left( \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right)^2$$

Подставим полученное выражение в интеграл 3го типа:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= A \int \frac{x}{x^2+px+q} dx + B \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{2} A \int \frac{(2x+p)-p}{x^2+px+q} dx + \\ &+ B \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2} = \frac{1}{2} A \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{p}{2} A\right) \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} A \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{p}{2} A\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C \end{aligned}$$

## 2.3 Методы нахождения значений А, В, С...

### 2.3.1 Метод неопределенных коэффициентов

**Состоит в сравнении коэффициентов при одинаковых степенях переменной  $x$ .**

Простейшие дроби приводят к общему знаменателю и числитель полученной новой дроби приравнивают к числителю подынтегральной функции. Получится система

«n» уравнений с «n» неизвестными A, B, C..., которая имеет единственное решение.

Пример. 
$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 2)} dx =$$

Подынтегральную функцию представим в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 2)} = \frac{\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{A}}{x-1} + \frac{\frac{(x^2+2x+2)}{B}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{(x-1)^2}{Cx+D}}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 9 &= A(x^3 - x^2 + 2x^2 - \cancel{2x} + \cancel{2x} - 2) + B(x^2 + 2x + 2) + \\ &+ (Cx + D)(x^2 - 2x + 1) = \underline{Ax^3} + \underline{Ax^2} - 2A + \underline{Bx^2} + \underline{2Bx} + 2B + \underline{Cx^3} - \\ &\underline{2Cx^2} + \underline{Cx} + \underline{Dx^2} - \underline{2Dx} + D = x^3(A + C) + x^2(A + B - 2C + D) + \\ &x(2B + C - 2D) + (-2A + 2B + D) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} 0 = A + C \\ 1 = A + B - 2C + D \\ -5 = 2B + C - 2D \\ 9 = -2A + 2B + D \end{array} \right.$$

Решая эту систему, получим:

$$A = -\frac{7}{5}$$

$$B = 1$$

$$D = \frac{21}{5}$$

$$C = \frac{7}{5}$$

Возвращаемся к исходному интегралу:

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx = \int \frac{-\frac{7}{5}}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{\frac{7}{5}x + \frac{21}{5}}{x^2 + 2x + 2} dx =$$

$$= -\frac{7}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{5} \int \frac{xdx}{(x^2 + 2x + 2)} + \frac{21}{5} \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} =$$

$$= -\frac{7}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} \int \frac{(2x+2) - 2}{x^2 + 2x + 2} dx + \frac{21}{5} \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} =$$

$$= -\frac{7}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{10} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2} dx - \frac{7}{5} \int \frac{dx}{(x+2x+1) - 1 + 2} + \frac{21}{5} \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} =$$

$$= -\frac{7}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{10} \ln|x^2 + 2x + 2| + \frac{14}{5} \operatorname{arctg}(x-1) + C$$

### 2.3.2 Метод частных значений.

**Если знаменатель правильной рациональной дроби разлагается только на линейные множители вида  $(x-a)(x-b)(x-c)$ , то можно применять метод частных значений**



**для нахождения коэффициентов А, В, С..., придавая х значения  $x = a; x = b; x = c$**

**Пример.**

$$\frac{2x^2 + 10x - 18}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

$$2x^2 + 10x - 18 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2)$$

$$x = 1 \quad \left| \quad -6 = A \cdot 3(-2) \quad A = 1\right.$$

$$x = -2 \quad \left| \quad -30 = B(-3)(-5) \quad B = -2\right.$$

$$x = 3 \quad \left| \quad 30 = C \cdot 2 \cdot 5 \quad C = 3\right.$$

**Во многих примерах удобно применять комбинированный метод: вместе использовать метод частных значений и метод неопределенных коэффициентов.**

**Выводы:** Если под знаком интеграла стоит рациональная дробь, то:

1. Если подынтегральное выражение - неправильная рациональная дробь, то ее надо представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.
2. Правильную рациональную дробь разложить на сумму простейших дробей, для чего определить значения коэффициентов А, В, С...

3. Подынтегральное выражение представить в виде суммы легко интегрируемых функций.

## 2.4 Интегрирование тригонометрических функций.

### 2.4.1 Универсальная тригонометрическая подстановка.

Рассмотрим интегралы вида:  $\int R(\sin x, \cos x) dx$   
(R- рациональная функция)

Такие интегралы могут быть сведены к интегралам от рациональной функции заменой переменной при помощи универсальной тригонометрической подстановки:

$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t}$  - универсальная тригонометрическая подстановка.

Основываясь на формулах тригонометрии, имеем:

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x} = \int \frac{2dt}{(1 + t^2) \left( 9 + 8 \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2t}{1 + t^2} \right)} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \\ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \\ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{(1 + t^2) \left( \frac{9 + 9t^2 + 8 - 8t^2 + 2t}{1 + t^2} \right)} = \int \frac{2dt}{t^2 + 2t + 17} = 2 \int \frac{dt}{(t^2 + 2t + 1) - 1 + 17} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{(t + 1)^2 + 4^2} = 2 \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t + 1}{4} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{4} + C$$

**2.4.2 Интегралы вида:**  $\int \sin^n x dx \quad ; \quad \int \cos^n x dx$

Находят с использованием рекуррентных (возвращающихся) формул:

$$\int \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx - \frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x$$

$$\int \cos^n x \cdot dx = \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \cdot dx + \frac{1}{n} \sin x \cdot \cos^{n-1} x$$

**Пример.**

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \frac{4-1}{4} \int \sin^{4-2} x dx - \frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^{4-1} x = \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx - \frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^3 x = \\ &= \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} \int \sin^0 x \cdot dx - \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x \right) - \frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^3 x = \frac{3}{8} x - \frac{3}{8} \sin x \cdot \cos x - \frac{1}{4} \sin^3 x \cdot \cos x + C \end{aligned}$$

**2.4.3 Интегралы вида:**  $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \cdot dx$ , где

**$n$  и  $m$ -** целые числа, причем **одно** из них **нечетное**.

Интегралы берутся с помощью формул:

1.  $\cos x \cdot dx = d(\sin x)$

2.  $\sin x \cdot dx = -d(\cos x)$

3.  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

4.  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

### Пример.

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x \cdot dx &= \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \sin x \cdot dx = -\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) = \\&= -\int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) = -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) = \\&= -\int \cos^4 x \cdot d(\cos x) + 2\int \cos^6 x \cdot d(\cos x) - \int \cos^8 x \cdot d(\cos x) = \\&= -\frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + c\end{aligned}$$

**2.4.4 Интегралы вида:**  $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ , где **n** и **m** – целые числа, но **оба четные**

Применяются формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

### Пример.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \\&= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + c = \\&= \underline{\underline{\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c}}\end{aligned}$$

### 2.4.5 Интегралы вида: $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ , где

**$n$  и  $m$  – целые числа, но отрицательные.**

Используется подстановка:  $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$

Выведем формулы для  $\sin^2 x$ ;  $\cos^2 x$ ;  $dx$

$$1. 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \boxed{\cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}}$$

$$2. \sin^2 x = \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x = t^2 \cdot \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}}$$

$$3. \operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{t' dt}{1 + t^2} \quad \boxed{dx = \frac{dt}{1 + t^2}}$$

### Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cdot \cos x - 16 \cos^2 x}.$$

Пусть:

$$\left| \begin{array}{ll} \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} & \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} & \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} & t = \operatorname{tg} x \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cdot \cos x - 16 \cos^2 x} &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^2 \left( \frac{t^2}{1+t^2} + 6 \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 16 \cdot \frac{1}{1+t^2} \right)} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t^2 + 6t + 9) - 9 - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{2 \cdot 5} \ln \left| \frac{t+3-5}{t+3+5} \right| + C = \\ &= \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8} \right| + C \end{aligned}$$

При помощи этой же подстановки берутся интегралы вида  $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ .

**2.4.6 Интегралы вида:**  $\int \sin nx \cdot \cos mx dx$  ;  
 $\int \cos nx \cdot \cos mx dx$  ;  $\int \sin nx \cdot \sin mx dx$  .

При интегрировании функций такого вида используются следующие формулы:

$$1. \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$2. \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$3. \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

**Пример.**

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot \sin 11x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos(x - 11x) - \cos(x + 11x)) dx = \frac{1}{2} \int (\cos 10x - \cos 12x) dx = \\ &= \frac{1}{20} \sin 10x - \frac{1}{24} \sin 12x + C \end{aligned}$$

**2.4.7 Интегралы вида:**  $\int \operatorname{tg}^n x \cdot \sec^{2m} x dx$ , где

**n и m - целые числа**

При решении используются формулы:

$$1. \sec^2 x dx = d(\operatorname{tg} x)$$

$$2. \operatorname{cosec}^2 x dx = -d(\operatorname{ctg} x)$$

$$3. 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$4. 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

**Пример.**

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} x dx = \int \operatorname{tg} x (\sec^2 x - 1) dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg} x dx = \\ &= \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

**2.4.8 Интегралы вида:**  $\int \operatorname{tg}^{2m-1} x \cdot \sec^m x dx$

Используются формулы:

$$1. \sec x \cdot \operatorname{tg} x dx = d(\sec x)$$



$$2. \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x dx = -d(\operatorname{cosec} x)$$

$$3. 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$4. 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

## 2.5 Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

### 2.5.1 Тригонометрические подстановки.

$$1) \boxed{\int R\left(x; \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx} \text{ применяется подстановка:}$$

$$x = a \cdot \operatorname{tg} t \quad ; \quad dx = a \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} \quad ; \quad \frac{x}{a} = \operatorname{tg} t \quad ; \quad t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$$2) \boxed{\int R\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx} \Rightarrow$$

$$x = a \cdot \sin t \quad ; \quad dx = a \cos t dt \quad ; \quad \frac{x}{a} = \sin t \quad ; \quad t = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$3) \boxed{\int R\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx}$$

$$x = a \cdot \sec t \quad ; \quad dx = a \sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt \quad ; \quad \frac{x}{a} = \sec t \quad ; \quad t = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}$$

**Замечание:** эти подстановки не единственные. В случае (1) можно было обозначить  $x = a \cdot \operatorname{ctg} t$ ; во (2) -  $x = a \cdot \cos t$

## Примеры.

1)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = 2 \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{2dt}{\cos^2 t} \\ t = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\cancel{2} dt}{\cancel{2} t dt \cdot \sqrt{4 + 4 \operatorname{tg}^2 t \cdot \cos^2 t}} = \int \frac{dt \cdot \cancel{\cos t}}{\sin t \cdot \cos \cancel{t} \cdot 2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sin t \cdot \cancel{\cos t} \cdot \cancel{\sec t}} = \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec} t \cdot dt = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{2} \right| + C$$


---

2)

$$\int x^2 \cdot \sqrt{9-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = 3 \sin t \\ dx = 3 \cos t dt \\ t = \arcsin \frac{x}{3} \end{array} \right| = \int 9 \sin^2 t \cdot \sqrt{9-9 \sin^2 t} \cdot 3 \cos t dt = 81 \int \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{81}{4} \int 4 \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = \frac{81}{4} \int \sin^2 2t dt = \frac{81}{4} \int \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{81}{8} \int (1 - \cos 4t) dt =$$

$$= \frac{81}{8} \int dt - \frac{81}{8} \cdot \frac{1}{4} \int \cos 4t d(4t) = \frac{81}{8} t - \frac{81}{32} \sin 4t + C =$$

$$= \frac{81}{8} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{81}{32} \sin \left( 4 \arcsin \frac{x}{3} \right) + C$$


---

3)

$$\int x \cdot \sqrt{x^2 - 16} dx = \left| \begin{array}{l} x = 4 \sec t \\ dx = 4 \sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt \\ t = \operatorname{arc} \sec \frac{x}{4} \end{array} \right| = \int 4 \sec t \cdot \sqrt{16 \sec^2 t - 16} \cdot 4 \sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt =$$

$$= 64 \int \sec^2 t \cdot \operatorname{tg}^2 t dt = 64 \int \operatorname{tg}^2 t d(\operatorname{tg} t) = 64 \frac{\operatorname{tg}^3 t}{3} + C = \frac{64}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 \left( \operatorname{arc} \sec \frac{x}{4} \right) + C$$

### 2.5.2 Интегрирование функций, содержащих дробные степени одного и того же аргумента.

$$\boxed{\int R(x; x^\alpha; x^\beta; \dots x^\gamma) dx}, \quad \text{где } \alpha, \beta, \gamma - \text{рациональные дроби}$$

Такие интегралы берутся подстановкой:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = t^n; \quad t = \sqrt[n]{x} \\ dx = n \cdot t^{n-1} \cdot dt \end{array}}, \quad \text{где } n - \text{наименьший общий знаменатель дробей } \alpha, \beta, \gamma.$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} = \int \frac{\sqrt[3]{t^6} \cdot 6t^5 dt}{\sqrt[3]{t^{12}} - \sqrt{t^6}} = 6 \int \frac{t^2 \cdot t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6 \int \frac{t^7 dt}{t^3(t-1)} = 6 \int \frac{t^4 dt}{t-1} =$$

$$\alpha = \frac{1}{3}; \quad \beta = \frac{2}{3}; \quad \gamma = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} t^4 \\ t^4 - t^3 \\ t^3 \\ t^3 - t^2 \\ t^2 \\ t^2 - t \\ t \\ t - 1 \\ 1 \end{array} \right| \frac{t-1}{t^3 + t^2 + t + 1}$$

$$n = 6$$

$$x = t^6$$

$$dx = 6t^5 dt$$

$$t = \sqrt[6]{x}$$

$$= 6 \int \left( t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 6 \left( \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) + C =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[6]{x^4} + 2 \cdot \sqrt[6]{x^3} + 3 \cdot \sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x}-1| + C =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x}-1| + C$$


---

### 2.5.3 Интегрирование функций, содержащих дробные степени линейных функций аргумента.

$$\int R \left( x; \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^\alpha; \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^\beta; \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^\gamma \right) dx$$

Используется подстановка:

$$\left( \frac{ax+b}{cx+d} \right) = t^n \quad ; \quad \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)' dx = n \cdot t^{n-1} \cdot dt$$

$$; \quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} ,$$

где **n**- наименьший общий знаменатель дробей  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} = \int \frac{6t^5 dt}{\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6}} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^2(t+1)} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} =$$

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{1}{3} \quad \left| \begin{array}{l} t^3 \\ t^3 + t^2 \\ -t^2 \\ -t^2 - t \\ t \\ t+1 \\ -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} t+1 \\ t^2 - t + 1 \end{array}$$

$$n = 6$$

$$x + 2 = t^6$$

$$dx = 6t^5 dt$$

$$t = \sqrt[6]{x+2}$$

$$\begin{aligned}
&= 6 \int \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + C = \\
&= 2\sqrt[6]{(x+2)^3} - 3\sqrt[6]{(x+2)^2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6\ln|\sqrt[6]{x+2} + 1| + C = \\
&= 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6\ln|\sqrt[6]{x+2} + 1| + C
\end{aligned}$$

## 2.6 Интегрирование функций, зависящих от показательной функции.

$$\boxed{\int R(a^x) dx} \quad ; \quad \boxed{\int R(e^x) dx}$$

Интегралы такого вида берутся подстановкой:

$$\boxed{a^x = t} \quad ; \quad \text{прологарифмируем}$$

$$\ln a^x = \ln t$$

$$x \cdot \ln a = \ln t$$

$$\boxed{x = \frac{\ln t}{\ln a}} \quad ; \quad \boxed{dx = \frac{dt}{t \cdot \ln a}}$$

**Пример**  $\int \frac{3^x dx}{1+9^x} = \int \frac{\cancel{t} \cdot dt}{\cancel{t} \cdot \ln 3 (1+t^2)} = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \operatorname{arctg} t + C =$

$$\left. \begin{aligned} 3^x &= t \\ x &= \frac{\ln t}{\ln 3} \\ dx &= \frac{dt}{t \cdot \ln 3} \end{aligned} \right| = \frac{1}{\ln 3} \cdot \operatorname{arctg} 3^x + C$$

## 2.7 Заключительные замечания

**1.Нахождение неопределенного интеграла основывается на сведении его к табличному.**

**Существует специальный справочник по неопределенному интегралу.**

**2.Если интеграл найден различными способами форма ответов будет разной, но как ранее было доказано, эти ответы отличаются друг от друга лишь на постоянное слагаемое.**

Например

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = -\int \cos^{-3} x d(\cos x) = -\frac{\cos^2 x}{-2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C_1$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x dx = \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C_2$$

Итак

$$F_1(x) = \frac{1}{2\cos^2 x} + C_1, \text{ а } F_2(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C_2$$

$$\begin{aligned} F_1(x) - F_2(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} + C_1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C_2 = \frac{1}{\cos^2 x} + C_1 - \frac{1\sin^2 x}{2\cos^2 x} - C_2 = \\ &= \frac{1 - \sin^2 x}{2\cos^2 x} + C_1 - C_2 = \\ &= \frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x} + C_1 - C_2 = \frac{1}{2} + C_1 - C_2 = C \end{aligned}$$

**3.Изложенные методы интегрирования не всегда позволяют находить неопределенный интеграл. Такие интегралы называются неберущимися и их можно вычислить только приближенными методами.**

$$\int \frac{\sin x}{x} dx - \text{интегральный синус}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx - \text{интегральный косинус}$$

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \text{интеграл Пуассона и т.д.}$$



